Αξιωματικοποίηση προβλημάτων με χρήση μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Η λύση του προβλήματος του «σημείου του Fermat», δηλαδή «να βρεθεί σημείο P του επιπέδου τέτοιο ώστε το άθροισμα των αποστάσεων του P από τρία σημεία του Α, Β, Γ να είναι ελάχιστο», δηλαδή έτσι ώστε

d(P, A)+d(P, B)+d(P, Γ)=min,

είναι δύσκολη στην επίπεδη ευκλείδεια γεωμετρία (θεώρημα του Πτολεμαίου κτλ), η οποία πολλές φορές δεν είναι εφαρμόσιμη.

Να λυθεί το πρόβλημα του σημείου του Fermat με χρήση της μη ευκλείδειας γεωμετρίας του ταξιτζή, αν Α(-3, 3), Β(4, 1), Γ(1, -3) είναι οι γωνίες των οικοδομικών τετραγώνων μιας πόλης που βρίσκονται τρείς βενζιναντλίες και P το σημείο που θέλουμε να γίνει το πλυντήριο αυτοκινήτων. Πόσο είναι το ελάχιστο άθροισμα;

Λύση

Η γεωμετρία του ταξιτζή είναι η γεωμετρία που εφαρμόζεται σε μια ιδανική «μπακλαβαδωτή» πόλη! …

Δηλαδή φανταζόμαστε, ότι υπάρχει μια πόλη όπου όλοι οι δρόμοι είναι οριζόντιοι (οδοί) ή κάθετοι (λεωφόροι). Τα οικοδομικά τετράγωνα, τα οποία είναι όλα ίσα μεταξύ τους, είναι τετράγωνα και ως σημεία θεωρούμε τις γωνίες των τετραγώνων.

Αν θέλουμε να πάμε από σε ένα σημείο Α σε ένα άλλο Β, που δεν ανήκουν στην ίδια οδό ή λεωφόρο, μπορούμε να κινηθούμε μόνο οριζόντια ή κάθετα. Έτσι δεν ισχύει πως η ελάχιστη διαδρομή είναι η

ευθεία διότι δεν μπορούμε σε μια τέτοια γεωμετρία να διαγράψουμε ευθείες, όπως στην ευκλείδεια, αλλά μόνο τεθλασμένες γραμμές. Οι διαδρομές που μπορούμε να ακολουθήσουμε είναι πολλές και αναζητείται η συντομότερη.

Για να βρούμε την συντομότερη διαδρομή, πρέπει να μετρήσουμε τον αριθμό των τετραγώνων που διανύουμε και να κρατήσουμε την διαδρομή με τα λιγότερα τετράγωνα. Πρέπει να παρατηρήσουμε ωστόσο ότι και έτσι δεν υπάρχει μοναδική ελάχιστη διαδρομή

Μαθηματικοποιώντας την παραπάνω περιγραφή, βλέπουμε πως αναφερόμαστε στο χώρο Ñ^2. Προκειμένου ωστόσο να μετράμε αποστάσεις, δεν χρησιμοποιούμε την ευκλείδεια μετρική, αλλά μια ματρική που ορίζουμε ως εξής: αν $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$œ Ñ^2 , ορίζουμε ως απόσταση των σημείων A, B τον μη αρνητικό αριθμό:

$d(A,\ B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$ **(1)**.

Πρέπει πρώτα να ελέγχουμε αν η **(1)** εισάγει ματρική στο Ñ^2 . Πρέπει :

$$d(A,\ B) \geq 0 \Rightarrow |x_A - x_B| + |y_A - y_B| \geq 0 \quad (\quad \text{ισχύει})$$

$$d(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=0\Rightarrow|x_A-x_B|+|y_A-y_B|=0\Rightarrow\begin{cases}|x_A-x_B|=0\\ \kappa\alpha\iota\\ |y_A-y_B|=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_A-x_B=0\\ \kappa\alpha\iota\\ y_a-y_B=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x_A=x_B\\ \kappa\alpha\iota\\ y_A=y_B\end{cases}\Rightarrow\mathrm{A}=\mathrm{B}$$

$$d\ (\mathrm{A},\ \mathrm{B})=|x_A-x_B|+|y_A-y_B|=|-(x_B-x_A)|+|-(y_B-y_A)|=$$

$$=|x_B-x_A|+|y_B-y_A|=d\ (\mathrm{B},\ \mathrm{A})$$

$$d(\mathrm{A},\ \Gamma)+d(\Gamma,\ \mathrm{B})=|x_A-x_\Gamma|+|y_A-y_\Gamma|+|x_\Gamma-x_B|+|y_\Gamma-y_B|\geq$$

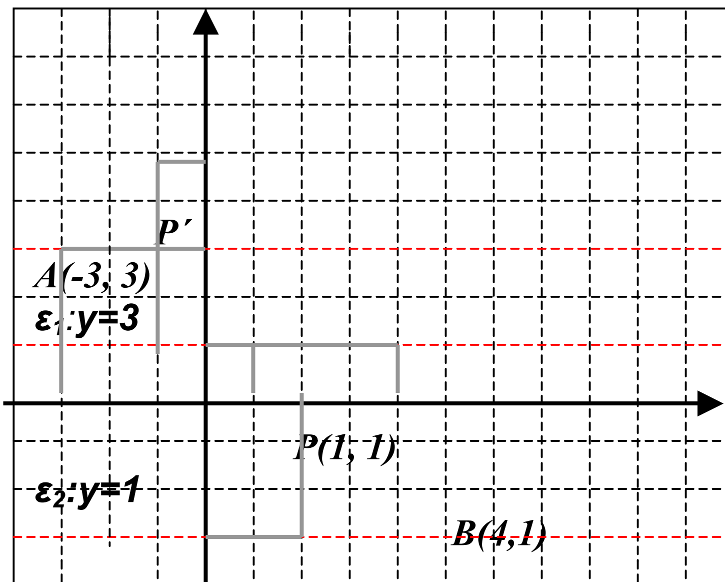
$$\geq|x_A-x_\Gamma+x_\Gamma-x_B|+|y_A-y_\Gamma+y_\Gamma-y_B|=|x_A-x_\mathrm{B}|+|y_\mathrm{A}-y_B|=d(\mathrm{A},\ \mathrm{B})$$

Συνεπώς η ισότητα **(1)** εισάγει μια μετρική στο Ñ^2, οπότε με αυτή θα μετράμε τις αποστάσεις στον χώρο. Στο πρόβλημα λοιπόν έχουμε τρία σημεία, τα A(-3, 3),

B(4, 1), Γ(1, -3) που ανήκουν στο Ñ², και θέλουμε να βρούμε P σημείο ώστε το άθροισμα των αποστάσεών του από τα A, B, Γ να είναι ελάχιστο.

Παρατηρούμε ότι κανένα από τα A, B, Γ, ανά δύο, δεν είναι στην ίδια οδό ή λεωφόρο, έχουν δηλαδή διαφορετικές τετμημένες και τεταγμένες.

Αρχικά θα δείξουμε ότι το ζητούμενο σημείο P έχει τεταγμένη y_p.



Όλα τα σημεία που βρίσκονται μεταξύ των ευθειών ε_1 και ε_2 έχουν σταθερό άθροισμα αποστάσεων από αυτές, ίσο με την κατακόρυφη απόσταση $d_y(A, \Gamma)$, ενώ τα σημεία που είναι εκτός της ζώνης των ευθειών ε_1 και ε_2, έχουν μεγαλύτερο άθροισμα από την $d_y(A, \Gamma)$. Άρα το σημείο P που αναζητούμε πρέπει να είναι μεταξύ των ευθειών ε_1 και ε_2.

Πράγματι, αν το P τέτοιο ώστε: $y_A > y_P > y_\Gamma$ προς τις τεταγμένες τους έχουμε

$$y_{\mathrm{A}} > y_{\mathrm{P}} > y_{\Gamma} \Leftrightarrow \begin{cases} y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{P}} > 0 \\ y_{\mathrm{P}} - y_{\Gamma} > 0 \end{cases} \quad \text{οπότε} \quad d_y(\mathrm{A},\ \mathrm{P}) + d_y(\mathrm{P},\ \Gamma)$$

$$= \left|y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{P}}\right| + \left|y_{\mathrm{P}} - y_{\Gamma}\right| = y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{P}} + y_{\mathrm{P}} - y_{\Gamma} = \left|y_{\mathrm{A}} - y_{\Gamma}\right| = d_y(\mathrm{A}, \Gamma)$$

Επίσης παρατηρούμε οτι τα σημεία ‘εκτός’ της ζώνης των ευθειών ε_1 και ε_2 δίνουν μεγαλύτερο άθροισμα στις διαφορές τεταγμένων. Έστω λοιπόν το P’ σε τέτοια θέση ώστε να ισχύει $y_{\mathrm{P}'}>y_{\mathrm{A}}>y_{\Gamma}$, οπότε θα έχουμε:

$$d_y(\mathrm{P}',\ \mathrm{A}) + d_y(\mathrm{P}',\ \Gamma) = \left|y_{\mathrm{P}'} - y_{\mathrm{A}}\right| + \left|y_{\mathrm{P}'} - y_{\Gamma}\right| = y_{\mathrm{P}'} - y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{P}'} - y_{\mathrm{A}} =$$

$$= 2y_{\mathrm{P}'} - y_{\mathrm{A}} - y_{\Gamma} > y_{\mathrm{A}} - y_{\Gamma}$$

Θα δείξουμε οτι για κάθε σημείο $P(x_P, y_P)$ *με* $-3 \le y_{\mathrm{P}} \le 3$ το άθροισμα $d_y(P,A) + d_y(P,B) + d_y(P,\Gamma)$ γίνεται ελάχιστο αν και μόνο αν $y_P=1$, δηλαδή το P ανήκει στην οριζόντια ευθεία ε_2 :y=1 που διέρχεται από το B.

Πράγματι έστω $P(x_P, y_P)$ *και* $Q(x_q, y_q)$ σημεία του επιπέδου τέτοια ώστε $-3 \le y_q \le 3$ και $y_P=1$. Τότε:

$$d_y(P,\ A)+d_y(P,\ B)+d_y(P,\ \Gamma)=\left|y_p-y_A\right|+\left|1-1\right|+\left|y_P-y_\Gamma\right|=$$

$$d_y(A,\ \Gamma)\le d_y(A,\ \Gamma)+\left|y_q-1\right|=$$

$$d_y(Q,\ A)+d_y(Q,\ B)+d_y(Q,\ \Gamma)$$

$$\Delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\quad d_y(\mathrm{P},\ A)+d_y(\mathrm{P},\ B)+d_y(\mathrm{P},\ \Gamma)\le d_y(Q,\ A)+d_y(Q,\ B)+d_y(Q,\ \Gamma)$$

Συνεπώς το P πρέπει να ανήκει στην ευθεία ε_2:y=1, δηλαδή πρέπει $y_P=1$

Με αντίστοιχους συλλογισμούς, θα προσδιορίσουμε την τετμημένη του P.

Ελέγχοντας τις τετμημένες των σημείων A, B, Γ βλέπουμε πως για το Γ ισχύει:

$x_A< x_\Gamma< x_B$, οπότε το P στην ζώνη των ευθειών x=-3 και x=4 και συγκεκριμένα θα έχει ίδια τετμημένη με αυτή του Γ. Άρα $x_P=1$.

Βρήκαμε λοιπόν πως το σημείο P θα έχει συντεταγμένες P(1, 1).

Οπότε αν υπολογίσουμε το άθροισμα των αποστάσεών του από τα σημεία A, B, Γ θα έχουμε:

$$d(\mathrm{P},\ \mathrm{A})+d(\mathrm{P},\ \mathrm{B})+d(\mathrm{P},\Gamma)=\left|x_\mathrm{P}-x_\mathrm{A}\right|+\left|y_\mathrm{P}-y_\mathrm{A}\right|+\left|x_\mathrm{P}-x_\mathrm{B}\right|+$$
$$\left|y_\mathrm{P}-y_\mathrm{B}\right|+\left|x_\mathrm{P}-x_\Gamma\right|+\left|y_\mathrm{P}-y_\Gamma\right|=$$

$$\left|1-(-3)\right|+\left|1-3\right|+\left|1-4\right|+\left|1-1\right|+\left|1-1\right|+\left|1-(-3)\right|=4+2+3+4=13$$